

CHAPITRE 2

ANALYSE FREQUENTIELLE DES SIGNAUX ET SYSTEMES NUMERIQUES

Witold Hurewicz (1904-1956). Mathématicien russe, spécialiste en topologie. Emigré aux Etats-Unis en 1936, il décida d'y rester et devint professeur au MIT, de 1945 à sa mort. Durant la seconde guerre mondiale, il participa à l'analyse des signaux radar, intrinsèquement discrets puisque la position des objets y est connue une seule fois par tour d'antenne. C'est dans ce contexte qu'il inventa en 1947 ce que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de *transformée en Z*.



Le chapitre 1 a montré l'essentiel de ce qui peut être dit des signaux et systèmes numériques (linéaires et invariants) dans le domaine temporel.

L'analyse fréquentielle des signaux numériques nécessite d'introduire la transformée de Fourier à temps discret (TFTD), homologue de la transformée de Fourier dans le monde numérique. Nous le ferons ici après un rappel sur l'analyse fréquentielle des signaux analogiques, par souci de cohérence.

Nous pourrions alors définir la réponse en fréquence d'un système numérique, comme facteur multiplicatif intervenant dans le calcul de sa réponse en régime sinusoïdal. Nous verrons que ce facteur multiplicatif peut être obtenu à partir de la fonction de transfert en Z du système. Nous terminerons par le calcul pratique de quelques filtres simples.

2.1 Rappel : Analyse fréquentielle des signaux analogiques

Un signal analogique est défini à tout instant t et est donc représentable mathématiquement par une fonction continue du temps $f(t)$. Nous supposons ici que la valeur prise par le signal au temps t est un scalaire (signal à une dimension) qui peut prendre n'importe quelle valeur, en général complexe.

2.1.1 Signaux analogiques

Un signal analogique peut être *périodique* ou *apériodique*.

On utilise souvent les signaux apériodiques suivants :

- rectangle $rect_a(t)$: rectangle de $-a/2$ à $+a/2$, d'amplitude 1 (Fig. 2.1.a).
- sinus cardinal $sinc(t) = \sin(t)/t$ (Fig. 2.1.b).
- impulsion de Dirac $\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{rect_a(t)}{a}$ (Fig. 2.1.c).

Ce dernier signal n'est pas vraiment une fonction, mais une *distribution*. Il peut cependant être manipulé comme une fonction sans engendrer de difficulté particulière pour les problèmes que nous traiterons ici.

- signaux aléatoires (Fig. 2.1.d), dont la forme d'onde est impossible à décrire sous une forme analytique simple : l'étude de ces signaux l'objet d'un chapitre ultérieur.

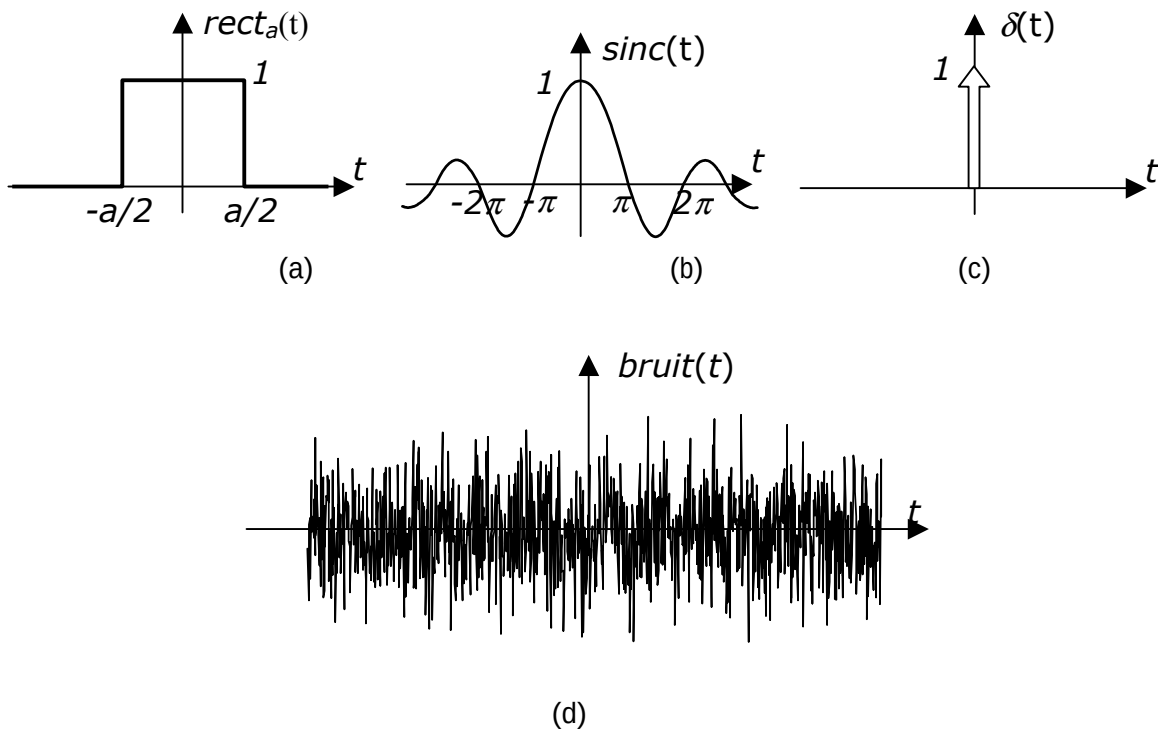


Fig. 2.1 Exemples de signaux analogiques (déterministes : a, b, c ; aléatoire : d)

Un signal périodique $f_{T_0}(t)$ de période fondamentale T_0 est composé d'une somme infinie de répétitions, à intervalles réguliers T_0 , d'une fonction de base non périodique $f(t)$ (Fig. 2.2):

$$f_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0) \quad (2.1)$$

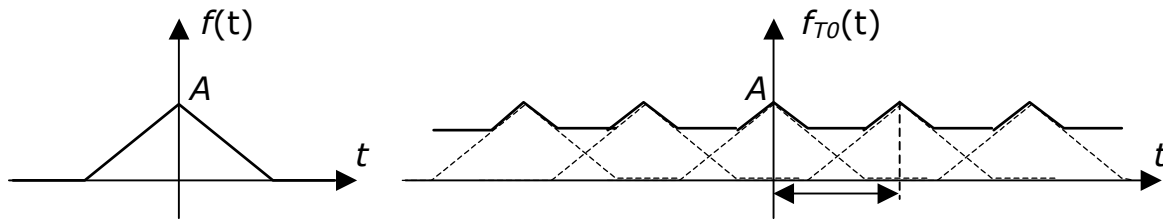


Fig. 2.2 Périodification (droite) d'un signal de base non périodique (gauche)

On utilise souvent les signaux périodiques suivants :

- exponentielle imaginaire $A e^{j\omega_0 t}$
- cisoïdes $a \sin \omega_0 t$ et $a \cos \omega_0 t$
- train d'impulsions de Dirac $\delta_{T_0}(t)$

Le train d'impulsion de Dirac sera utilisé ici pour exprimer mathématiquement la périodicité d'un signal. En effet, on comprend facilement que la convolution entre $\delta_{T_0}(t)$ et une fonction $f(t)$ conduit à une fonction périodique $f_{T_0}(t)$ répondant à (2.1) (Fig. 2.3):

$$f(t) * \delta_{T_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_{T_0}(t - \tau) d\tau = f_{T_0}(t) \quad (2.2)$$

L'équation précédente peut en effet être interprétée comme le passage d'un train d'impulsions à travers un filtre de réponse impulsionnelle $f(t)$. Le filtre répond donc par une somme de réponses impulsionnelles à la cadence du train d'impulsions.

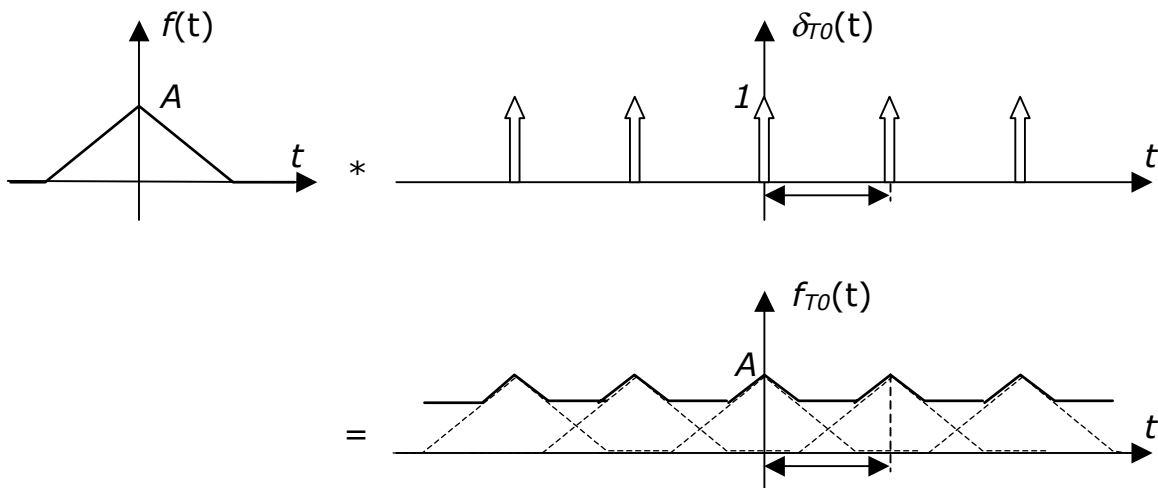


Fig. 2.3 Convolution d'un signal de base non périodique avec un train d'impulsions de Dirac

2.1.2 Produit scalaire de signaux analogiques

Le produit scalaire de deux fonctions complexes $f(t)$ et $g(t)$ est défini par :

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt \quad (2.3)$$

Il peut être vu comme une extension, à l'espace des fonctions, du produit scalaire défini dans un espace vectoriel (complexe, en général).

En particulier le produit scalaire d'une fonction par elle-même est égal à son *énergie* E , homologue du carré de la norme d'un vecteur, et définie par :

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = E \quad (2.4)$$

L'expression (2.3) n'est en général définie que pour des signaux d'énergie finie. Parmi les signaux introduits plus haut, seuls $rect_a(t)$ et $sinc(t)$ possèdent cette propriété. L'impulsion de Dirac est une exception notoire : son énergie n'est pas définie (au sens des fonctions), mais son produit scalaire avec une fonction existe :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (2.5)^1$$

Nous admettrons ici que, *au sens des distributions*, $\delta(t)$ est un signal d'énergie égale à 1, sans que cela ne soit gênant pour l'étude des problèmes traités.

Les signaux périodiques sont évidemment d'énergie infinie. On admettra également ici que la *théorie des distributions* permet de donner une valeur finie au produit scalaire de deux signaux périodiques de puissance finie (pour lesquels l'expression (2.3) donne en principe un résultat infini) en posant que le produit scalaire de deux fonctions périodiques de puissance finie est donné, *au sens des distributions*², par :

$$\langle f_{T_0}(t), g_T(t) \rangle = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} f_{T_0}(t) g_T^*(t) dt & (si \ T = T_0 / k; \ k \in \mathbb{N}) \\ 0 & (si \ T \neq T_0 / k; \ k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Ce qui se réécrit plus simplement :

$$\langle f_{T_0}(t), g_T(t) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) g_T^*(t) dt & (si \ T = T_0 / k; \ k \in \mathbb{N}) \\ 0 & (si \ T \neq T_0 / k; \ k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (2.7)$$

Autrement dit : deux fonctions périodiques dont les périodes ne sont pas multiples l'une de l'autre sont *orthogonales*. Dans le cas contraire, leur produit scalaire peut être calculé comme le produit scalaire classique, estimé sur la période la plus longue et rapporté à celle-ci.

¹ Cette expression est parfois utilisée comme définition de l'impulsion de Dirac.

² Au sens classique, l'équation (2.7) est fausse. On l'utilise ici dans un but didactique, afin de rendre plus cohérent l'exposé de l'étude des fonctions périodiques et non périodiques, sans alourdir inutilement les notations.

Il suffit, pour passer du sens des distributions au sens classique, de considérer que les résultats obtenus au sens des distributions sont en réalité les poids d'impulsions de Dirac :

$$\langle f_{T_0}(t), g_T(t) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) g_T^*(t) dt \right) \delta(T - T_0/k) \quad (2.8)$$

En particulier, le produit scalaire d'un signal périodique par lui-même donne sa *puissance* P :

$$\langle f_{T_0}(t), f_{T_0}(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f_{T_0}(t)|^2 dt = P \quad (2.9)$$

L'expression (2.7) n'est en général définie que pour des signaux de puissance finie. Cette classe couvre en pratique tous les signaux périodiques dont la période est un signal d'énergie finie (c'est-à-dire tous ceux qui sont utilisés en pratique).

Exemple 2.1

$$\langle f(t), \delta(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (2.10)$$

$$\langle \text{rect}_a(t), \varepsilon(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_a(t) \varepsilon(t) dt = a/2 \quad (2.11)$$

$$\langle \sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t) \rangle \stackrel{\text{Distr.}}{=} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2} dt = \frac{1}{T_0} \left[-\frac{\cos(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = 0 \quad (2.12)$$

$$\langle e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega t} \rangle \stackrel{\text{Distr.}}{=} \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 1 & (\text{si } \omega = k\omega_0) \\ 0 & (\text{si } \omega \neq k\omega_0) \end{cases}$$

On démontrera à titre d'exercice que le produit scalaire ci-dessus s'annule même quand $\omega = k\omega_0$, sauf pour $k=1$. Il reste donc : (2.13)³

$$\langle e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega t} \rangle \stackrel{\text{Distr.}}{=} \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 1 & (\text{si } \omega = \omega_0) \\ 0 & (\text{si } \omega \neq \omega_0) \end{cases}$$

Nous savions déjà que les fonctions périodiques de périodes non multiples l'une de l'autre sont orthogonales ; nous constatons ici que les exponentielles sont des fonctions périodiques très particulières⁴ : elle sont *toutes* orthogonales et de norme unitaire.

³ Cette équation correspond, au sens classique, à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \delta(\omega - \omega_0)$$

2.1.3 Transformée de Fourier

L'équation (2.5) peut être interprétée de la façon suivante : un signal analogique $f(t)$ peut être décomposé comme une somme continue de fonctions de base orthonormées⁵ $\{\delta(t-\tau) (\tau \in [-\infty, +\infty])\}$. Les coefficients de cette décomposition sont fonction de la variable τ et valent tout simplement $f(\tau)$. L'équation (2.10) exprime alors simplement le fait que les coefficients de la décomposition sont obtenus par produit scalaire de $f(t)$ avec les fonctions de base.

Un des résultats importants de l'analyse mathématique (que l'on admettra ici) est de montrer que **l'on peut également décomposer un signal d'énergie finie comme une somme continue de fonctions de base** $\{e^{j\omega t} (\omega \in [-\infty, +\infty])\}$: les exponentielles imaginaires. Ceci s'exprime comme suit :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j\omega t} df \quad (2.14)$$

Les coefficients complexes de cette somme pondérée continue sont fonction de la variable f (fréquence) et constituent la *transformée de Fourier* de $f(t)$, notée $F(f)$.

Le calcul de $F(f)$ est simple : il est basé sur la projection de $f(t)$ sur les fonctions de base, à l'aide du produit scalaire. Si l'on admet en effet que ces fonctions constituent une base de l'ensemble des fonctions d'énergie finie, cette base est *orthonormée*, vu (2.13). Il s'ensuit que les coefficients intervenant dans la décomposition de $f(t)$ sur ces fonctions de base peuvent être obtenus par simple projection de $f(t)$:

$$F(f) = \langle f(t), e^{j\omega t} \rangle \quad (2.15)$$

ce qui conduit à l'expression bien connue de $F(f)$:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.16)$$

Le couple $f(t)$ et $F(f)$ constitue une *paire de transformées de Fourier*. On note souvent cette relation sous la forme :

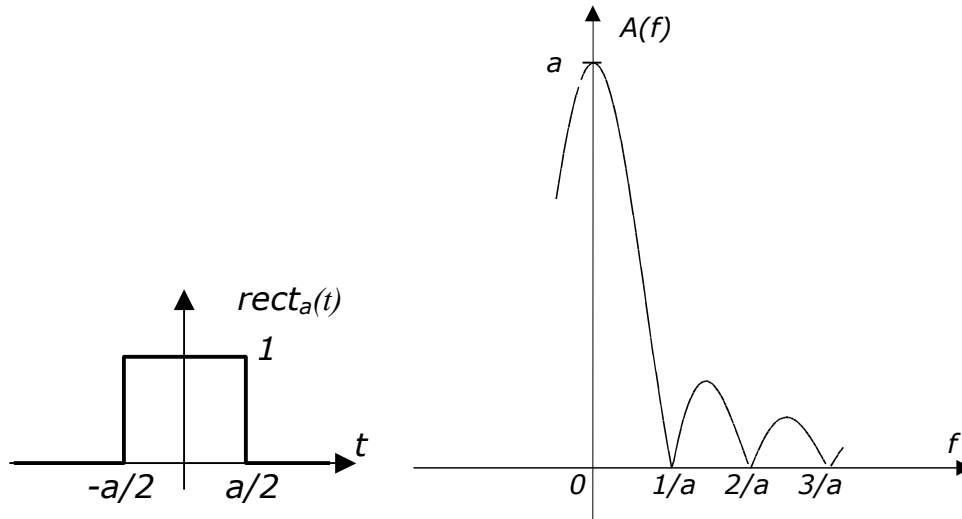
$$f(t) \stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow} F(f) \quad (2.17)$$

Exemple 2.2

$$\text{rect}_a(t) \stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow} a \frac{\sin a\omega/2}{a\omega/2}$$

⁴ Ce ne sont pas les seules fonctions orthogonales. Le traitement du signal foisonne d'ensembles de signaux orthogonaux, vu la facilité avec laquelle on peut décomposer un signal quelconque sur de tels signaux. Les *ondelettes* en sont un bel exemple.

⁵ On a admis en effet que l'énergie (analogue du carré de la norme) de $\delta(t-\tau)$ vaut 1 quelque soit t ; il est par ailleurs évident que deux impulsions de Dirac placées en des temps différents sont orthogonales.



On peut retrouver ce résultat intuitivement. Il est clair, si l'on se souvient que la transformée de Fourier est un produit scalaire, que sa valeur en $f=0$ est l'intégrale de la fonction $f(t)$ (donc a pour $rect_a(t)$). Par ailleurs, il est évident que $F(f)$, étant un produit scalaire entre $f(t)$ et les exponentielles imaginaires, s'annule pour toutes les exponentielles imaginaires de périodes égales à a/k (avec k entier positif) .

Exemple 2.3

$\delta(t) \stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow} 1$ Immédiat, vu l'interprétation de $F(f)$ comme un produit scalaire.

Les propriétés essentielles de la transformée de Fourier sont reprises au Tableau 2.1.

(linéarité)	$\sum_i a_i \cdot f_i(t)$	$\stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow}$	$\sum_i a_i \cdot F_i(f)$
(retard)	$f(t - t_0)$	$\stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow}$	$F(f) \exp(-j t_0 \omega)$
(convolution)	$f(t) * g(t)$	$\stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow}$	$F(f) G(f)$
(produit)	$f(t) g(t)$	$\stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow}$	$F(f) * G(f)$
(produit scalaire)	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt$	$\stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow}$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(f) G^*(f) df$
(Parseval)	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt$	$\stackrel{\mathbb{F}}{\Leftrightarrow}$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(f) ^2 df$

Tableau 2.1 Propriétés principales de la transformée de Fourier.

Les théorèmes du produit scalaire et de Parseval (qui n'est qu'une forme particulière du précédent) prennent un sens évident si on comprend que $f(t)$ et $F(f)$ sont les composantes de $f(t)$ sur deux ensembles de fonctions de base orthonormées : $\{\delta(t - \tau) (t \in [-\infty, +\infty])\}$ et $\{e^{j\omega t} (\omega \in [-\infty, +\infty])\}$. Ce théorème n'exprime en effet rien d'autre que le fait que le produit scalaire de deux fonctions (et donc le carré de la norme d'une fonction) est indépendant du repère sur lequel on les projette.

On peut également démontrer que l'amplitude spectrale est une fonction paire en f tandis que la phase spectrale est une fonction impaire en f (Fig. 2.4). Autrement dit, les exponentielles complexes dont est constitué un signal réel vont toujours par paires complexes conjuguées (de même amplitude, tournant à même vitesse dans des sens opposés et avec des phases initiales opposées).

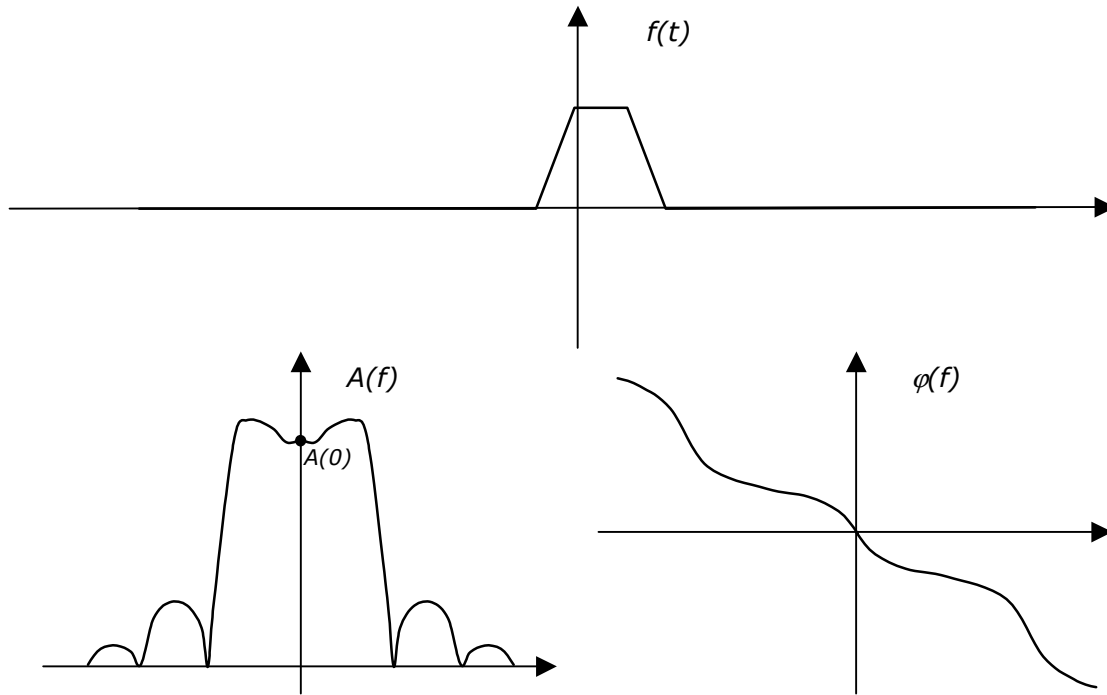


Fig. 2.4 Amplitude et phase de la transformée de Fourier d'un signal non périodique $f(t)$.

2.1.4 Séries de Fourier

La propriété (2.16) reste valable pour les signaux périodiques de puissance finie. En vertu de l'extension du produit scalaire aux fonctions périodiques (2.6), l'application de la projection (2.15) à une fonction périodiques $f_{T_0}(t)$ s'écrit en effet, *au sens des distributions* :

$$F_{T_0}(f) = \langle f_{T_0}(t), e^{j\omega t} \rangle^{Distr.} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq k\omega_0 \\ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-j\omega t} dt & \text{si } \omega = k\omega_0 \end{cases} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right) \quad (2.18)$$

ce qui correspond, au sens classique, à un train d'impulsions de Dirac de poids variables avec la fréquence :

$$F_{T_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(f - kf_0) \quad \text{avec} \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.19)$$

Les signaux périodiques possèdent donc un spectre de raies (Fig. 2.5). L'amplitude de ces raies est égale à l'amplitude du spectre du signal non périodique $f(t)$ (à partir duquel le signal $f_{T_0}(t)$ a été obtenu), divisée par la période T_0 .

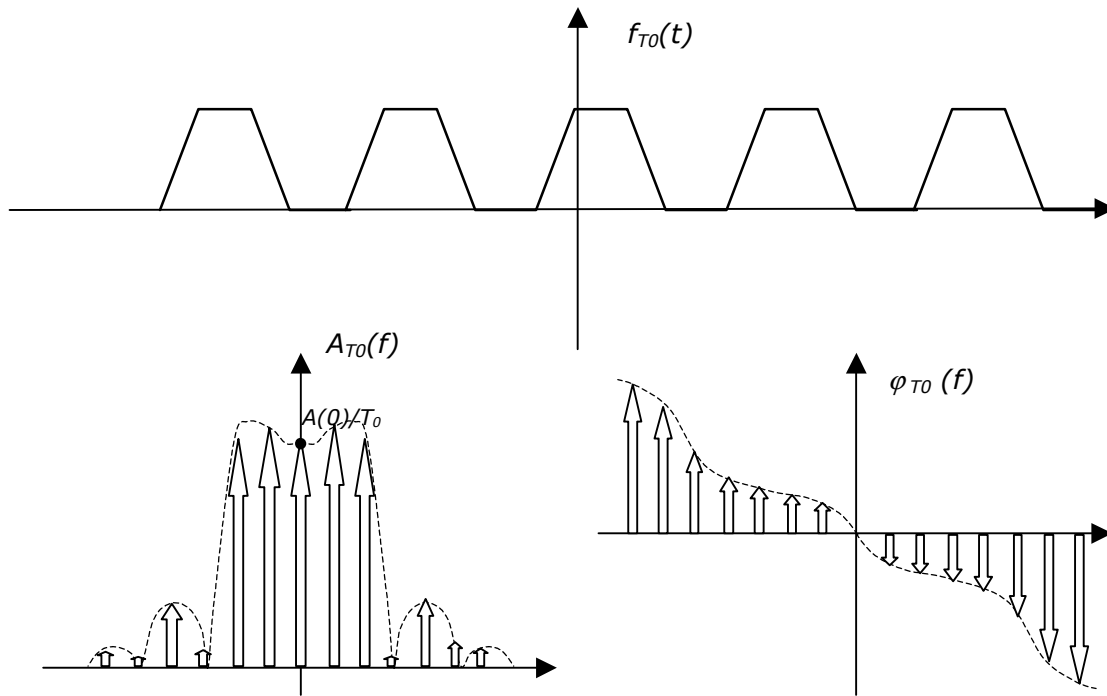


Fig. 2.5 Amplitude et phase de la transformée de Fourier d'un signal périodique $f_{T0}(t)$.

La somme continue (2.14) se réduit finalement une somme discrète, que l'on appelle *série de Fourier* associée à $f_{T0}(t)$:

$$f_{T0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.20)$$

Les signaux périodiques possèdent donc un spectre de raies (d'impulsions de Dirac) dont les amplitudes (les poids) sont égales aux coefficients de leur décomposition en série de Fourier.

Exemple 2.4

Il est évident qu'une exponentielle imaginaire de pulsation ω_0 peut être décomposée comme une somme continue et pondérée d'exponentielles imaginaires : la seule exponentielle intervenant dans cette décomposition est bien entendu l'exponentielle de départ (Fig. 2.6).

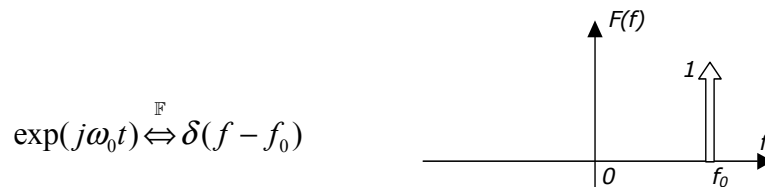


Fig. 2.6 Transformée de Fourier d'une exponentielle imaginaire

Exemple 2.5

De même, on sait déjà qu'un cosinus est la somme de deux exponentielles imaginaires conjuguées et d'amplitude 1/2; la décomposition s'exprime donc comme à la Fig. 2.7.

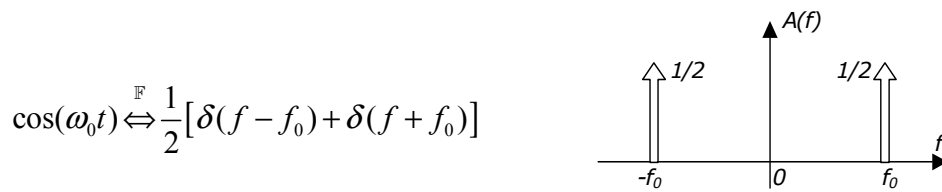


Fig. 2.7 Transformée de Fourier d'un cosinus

En particulier, la fonction $f(t)=1$ n'est rien d'autre qu'un cosinus de fréquence nulle :



Fig. 2.8 Transformée de Fourier d'une constante

On trouve tout aussi facilement, et sans aucun calcul d'intégrale :

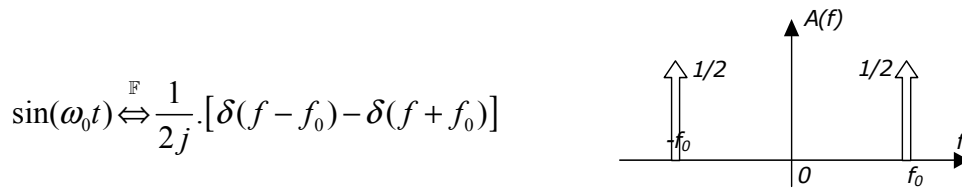


Fig. 2.9 Transformée de Fourier d'un sinus

Exemple 2.6

La projection d'un train d'impulsions (ou *peigne*) de Dirac temporel de période T_0 sur les fonctions de base donne un train d'impulsions de Dirac fréquentiel de période f_0 et d'amplitude $1/T_0$.

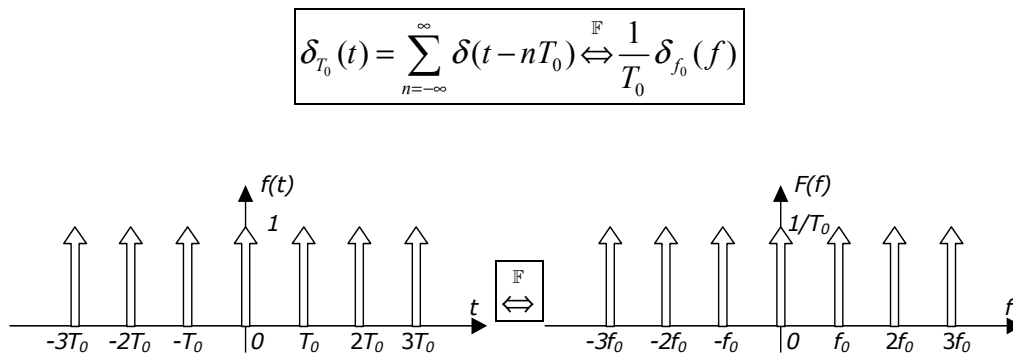


Fig. 2.10 Transformée de Fourier d'un train d'impulsions

Cette dernière relation permet d'ailleurs de comprendre l'équation (2.19) et la Fig. 2.5 différemment. En effet, puisqu'on a :

$$f_{T_0}(t) = f(t) * \delta_{T_0}(t) \quad (2.21)$$

cette convolution se traduit en transformée de Fourier par un produit⁶ :

$$F_{T_0}(f) = \frac{1}{T_0} F(f) \delta_{f_0}(f) \quad (2.22)$$

2.2 Analyse fréquentielle des signaux à temps discret

Contrairement au signal analogique, un *signal à temps discret* n'est défini qu'aux *instants d'échantillonnage* nT_e , multiples entiers de la *période d'échantillonnage* T_e . Les valeurs qu'il prend à ces instants sont notés $f(n)$ et appelés *échantillons*. On peut donc associer à un signal à temps discret la fonction (analogique) $f^+(t)$:

$$f^+(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(t - nT_e) \quad (2.23)$$

ou noter plus simplement le signal numérique :

$$\{f(n)\} = \{\dots, f(-n), \dots, f(-1), f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\} \quad (2.24)$$

Dans le cas très courant d'un signal à temps discret causal, on note encore plus simplement :

$$\{f(n)\} = \{f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\} \quad (2.25)$$

Dans la suite, nous appellerons $F_e = 1/T_e$ *fréquence d'échantillonnage* et $\omega_e = 2\pi F_e$ *pulsation d'échantillonnage*.

Exemple 2.7

L'exponentielle imaginaire à temps discret $f(n) = e^{jn\phi}$ représente une exponentielle imaginaire analogique de période égale à $2\pi/\phi$ échantillons, ce qui correspond à $2\pi T_e/\phi$ secondes.

Dans le cas d'un signal périodique à temps discret de période égale à n_0 échantillons, que nous noterons $\{f_{n_0}(n)\}$, l'expression (2.23) peut se réécrire sous la forme de la fonction (analogique) $f_{T_0}^+(t)$, correspondant à (2.1) pour les signaux à temps discrets :

$$f_{T_0}^+(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^+(t - kn_0 T_e) \quad (2.26)$$

où l'on a explicité le fait que la période doit correspondre à un nombre entier n_0 d'échantillons. On suppose également dans cette expression que la fonction $f^+(t)$ correspond à une période de $f_{T_0}^+(t)$, c'est-à-dire à n_0 échantillons :

$$f^+(t) = \sum_{n=-0}^{n_0-1} f(n) \delta(t - nT_e) \quad (2.27)$$

⁶ En principe, notons que le produit d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ avec une fonction $f(t)$ n'est pas défini au sens classique. Nous l'accepterons ici, *au sens des distributions*, en supposant que le produit est une impulsion $f(0)\delta(t)$. Le résultat (2.22) est alors identique à (2.19).

2.2.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

La transformée de Fourier à temps discret d'un signal à temps discret $\{f(n)\}$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier du signal $f^+(t)$ sous-jacent. Ce dernier est en effet décomposable sur les fonctions exponentielles imaginaires :

$$f^+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F^+(f) e^{j\omega t} df \quad (2.28)$$

Les coefficients de cette décomposition sont obtenus par projection suivant (2.16) :

$$F^+(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(t - nT_e) \right) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\omega n T_e} \quad (2.29)$$

que l'on réécrit plus simplement :

$$F^+(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn2\pi F} \quad \text{avec} \quad F = \frac{T_e}{T} = \frac{f}{F_e} \quad (2.30)$$

où F est la *fréquence normalisée*⁷, sans dimension.

On définit souvent aussi la *pulsation normalisée* φ ⁸ (parfois aussi notée Ω), comme égale à $2\pi F$, ce qui donne la notation plus compacte :

$$F^+(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\varphi} \quad \text{avec} \quad \varphi = 2\pi F = 2\pi \frac{f}{F_e} \quad (2.31)$$

L'examen de ces dernières relations montre que $F^+(F)$ est une fonction périodique (Fig. 2.11) en F de période 1 (ce qui correspond à une période de f_e en fréquence non normalisée), et que $F^+(\varphi)$ est une fonction périodique en φ de période 2π (ce qui correspond à une période de ω_e en pulsation non normalisée).

On peut dès lors réécrire l'expression (2.28) au sens des distributions sous la forme :

$$\begin{aligned} f^+(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq nT_e \\ \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} F^+(f) e^{j\omega n T_e} df & \text{si } t = nT_e \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq nT_e \\ \int_{-1/2}^{1/2} F^+(F) e^{jn\varphi} dF & \text{si } t = nT_e \end{cases} \end{aligned} \quad (2.32)$$

On en déduit la formule d'inversion en F ou en φ :

$$f(n) = \int_{-1/2}^{1/2} F^+(F) e^{jn\varphi} dF \quad \text{ou} \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^+(\varphi) e^{jn\varphi} d\varphi \quad (2.33)$$

⁷ F est égale à la fréquence f si la période d'échantillonnage est égale à 1.

⁸ φ est égale à la pulsation ω si la période d'échantillonnage est égale à 1.

Le signal $\{f(n)\}$ et la fonction $F^+(F)$ constituent une paire de transformées de Fourier à temps discret, notée :

$$\{f(n)\} \stackrel{TFTD}{\Leftrightarrow} F^+(F) \quad (2.34)$$

ou plus simplement, en laissant tomber l'indice « + » devenu superflu :

$$\{f(n)\} \stackrel{TFTD}{\Leftrightarrow} F(F) \quad (2.35)$$

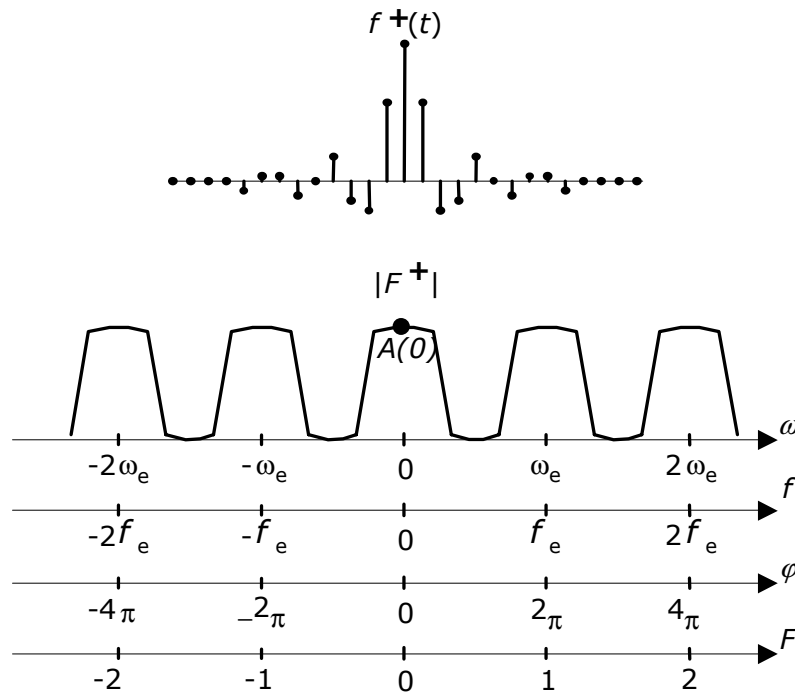


Fig. 2.11 TFTD d'un signal numérique non périodique

Comme c'était déjà le cas pour la transformée de Fourier, la TFTD $F(F)$ d'un signal $\{f(n)\}$ réel est telle que $F(-F) = F(F)^*$, c'est-à-dire que les valeurs de $F(F)$ entre 0 et 1 ne sont rien d'autre que les conjuguées des valeurs de $F(F)$ entre 0 et -1.

Interprétation géométrique

L'expression (2.30) possède une interprétation géométrique immédiate : pour toute fréquence normalisée F , $F(F)$ est la somme vectorielle de vecteurs complexes de type $f(n)e^{jn\varphi}$.

Exemple 2.8

Soit le signal numérique causal $\{f(n)\} = \{1, 2, 1, 0, 0, 0, \dots\}$. On peut facilement calculer la valeur de sa TFTD $F(F)$ pour $F=1/16$ et $1/8$, c'est-à-dire $F(\varphi)$ pour $\varphi = \pi/8$ et $\pi/4$ (Fig. 2.12) :

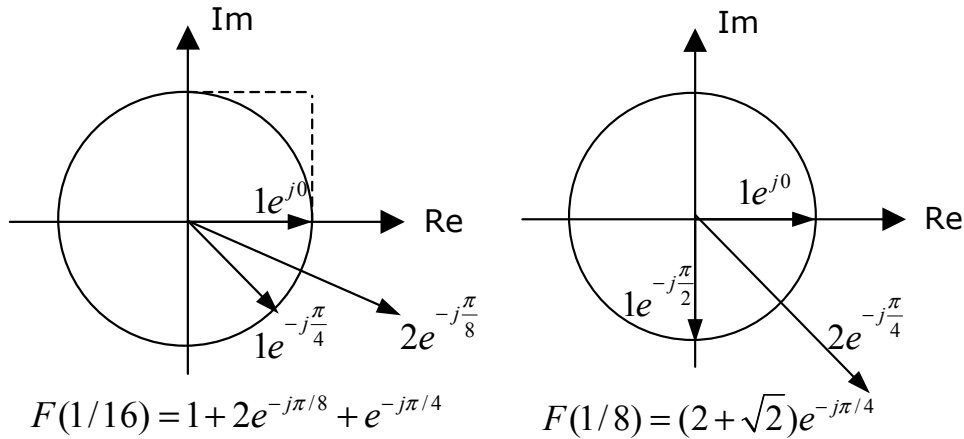


Fig. 2.12 Calcul géométrique de la TFTD pour $F=1/16$ et $1/8$ ($\varphi=\pi/8$ et $\pi/4$)

L'estimation complète et l'affichage de la TFTD $F(F)$ d'un signal $f(n)$ peut être faite sous Matlab en utilisant la fonction `freqz(f,1)` où f est le vecteur de la séquence $f(n)$ (nous verrons plus loin pourquoi le deuxième argument doit être 1) :

`freqz([1 2 1],1) % calcule et affiche la TFTD de f sur 512 points entre F=0 et 1/2`

On constate (Fig. 2.13) que Matlab normalise par défaut l'axe des fréquences par rapport à la fréquence de Nyquist ($F_e/2$), et n'affiche la TFTD que dans la zone utile $f=0.. F_e/2$.

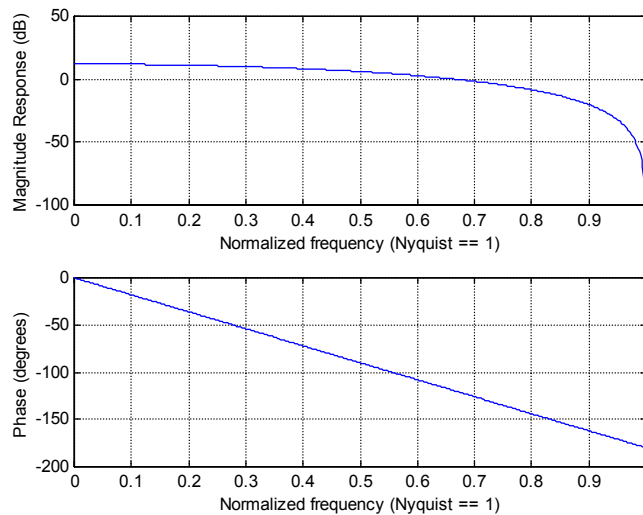


Fig. 2.13 Affichage de la TFTD par Matlab

Propriétés

Les propriétés de la TFTD sont les mêmes que celles de la transformée de Fourier (la TFTD n'étant rien d'autre elle-même qu'une transformée de Fourier). Elles sont présentées au Tableau 2.2. La propriété de produit temporel et le théorème de Parseval prennent ici une forme particulière (que l'on admettra sans

démonstration), due à la périodicité des transformées : les intégrales sont calculées sur une seule période (pour F allant de $-1/2$ à $+1/2$).

(linéarité)	$\sum_i a_i f_i(n)$	$\Leftrightarrow$	$\sum_i a_i F_i(F)$
(dilatation)	$f(an)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{ a } F(F/a)$
(retard)	$f(n-n_0)$	$\Leftrightarrow$	$F(F) \exp(-jt_0 \varphi)$
(convolution)	$f(n) * g(n)$	$\Leftrightarrow$	$F(F)G(F)$
(produit)	$f(n)g(n)$	$\Leftrightarrow$	$\int_{-1/2}^{1/2} F(F-\Phi)G(\Phi)d\Phi$
(Parseval)	$\sum_n f(n) ^2$	$\Leftrightarrow$	$\int_{-1/2}^{1/2} F(F) ^2 dF$

Tableau 2.2 Propriétés principales de la transformée de Fourier à temps discret.

2.2.2 Séries de Fourier à temps discret (SFTD)

L'application de la transformée de Fourier à temps discret à un signal périodique $\{f_{n_0}(n)\}$ de période n_0 échantillons (et donc $T_0 = n_0 T_e$) correspond à la projection de la fonction $f_{T_0}^+(t)$ sous-jacente sur les fonctions de base $\{e^{j\omega t} (\omega \in [-\infty, +\infty])\}$. Ceci ne peut se faire qu'au sens des distributions, suivant (2.18) :

$$F_{T_0}^+(f) = \langle f_{T_0}^+(t), e^{j\omega t} \rangle^{Distr.} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq kf_0 \\ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}^+(t) e^{-j\omega t} dt & \text{si } f = kf_0 \end{cases} \quad (f_0 = \frac{2\pi}{T_0}) \quad (2.36)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq kf_0 \\ \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n) e^{-j\omega n T_e} & \text{si } f = kf_0 \end{cases}$$

Ce qui peut se réécrire plus simplement, en faisant apparaître la pulsation normalisée⁹ :

$$F_{T_0}(F) \stackrel{Distr.}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } F \neq kF_0 \\ \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n) e^{-jn\varphi} & \text{si } F = kF_0 \end{cases} \quad (F_0 = \frac{1}{n_0}) \quad (2.37)$$

On constate, comme dans le cas d'un signal à temps discret non périodique, que $F_{T_0}(F)$ est périodique de période 1.

⁹ Comme à la section précédente, on laisse tomber l'indice « + » lorsque la formule fait apparaître les échantillons $f(n)$ plutôt que la fonction sous-jacente $f^+(t)$.

L'équation (2.37) correspond, au sens classique, à un train d'impulsions de Dirac de poids variables avec la fréquence :

$$F_{T_0}(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\varphi - k\varphi_0) \quad \text{avec} \quad F_k = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n) e^{-jn k \varphi_0} \quad (2.38)$$

Les signaux périodiques à temps discret possèdent donc un spectre de raies de pas $1/n_0$ (en F ; ou $2\pi/n_0$ en φ ; ou F_e/n_0 en fréquence non normalisée). Ce spectre de raies est lui-même périodique (Fig. 2.14) de période 1 (en F , ou 2π en φ ; ou F_e en fréquence non normalisée). L'amplitude des raies est égale l'amplitude du spectre du signal non périodique $f^+(t)$ (à partir duquel le signal $f^+_{T_0}(t)$ a été obtenu), divisée par la période T_0 .¹⁰

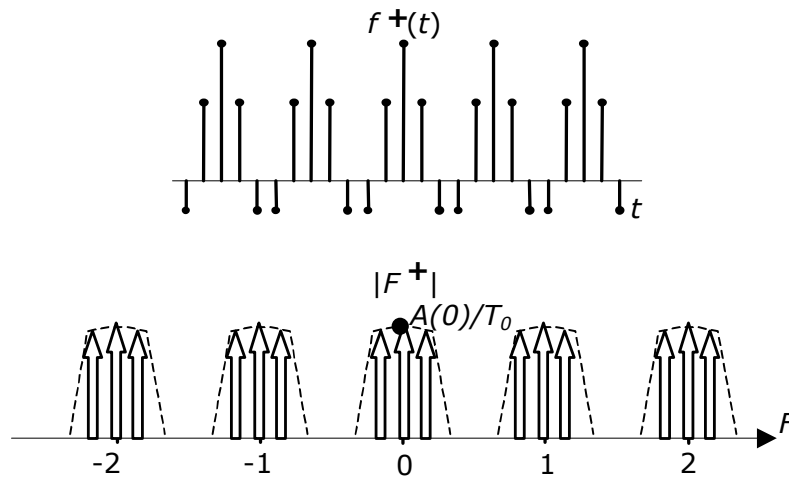


Fig. 2.14 TFTD d'un signal numérique périodique

La somme continue (2.28) se réduit finalement à une somme discrète, que l'on appelle *série de Fourier à temps discret* associée à $f^+_{T_0}(t)$:

$$f^+_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.39)$$

2.3 Réponse en fréquence d'un SLI numérique

2.3.1 Réponse de régime à une exponentielle imaginaire numérique

Soit un SLI numérique excité par l'exponentielle imaginaire $x(n) = e^{jn\varphi}$ ($n = -\infty, \dots, +\infty$). La réponse de régime est donnée par :

¹⁰ Le spectre d'un signal périodique numérique est donc lié au spectre du signal non périodique sous-jacent de la même façon qu'en analogique. En particulier, les expressions (2.21) et (2.22) restent valables.

$$\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n-i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{j(n-i)\varphi} \\
&= e^{jn\varphi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-ji\varphi}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Ce qui donne finalement :

$$y(n) = e^{jn\varphi} H(\varphi) \quad \text{avec} \quad H(\varphi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-ji\varphi} \tag{2.41}$$

On constate donc que l'exponentielle imaginaire (numérique) est une *fonction propre* de tout SLI numérique : la réponse de régime d'un SLI à une exponentielle imaginaire n'est autre que l'exponentielle imaginaire d'entrée, multiplié par un facteur complexe $H(\varphi)$ qui dépend de la pulsation normalisée φ de l'exponentielle.

La grandeur $H(\varphi)$ ainsi définie est appelée *fonction de réponse en fréquence*, ou *transmittance isochrone*, du SLI. L'équation (2.41) montre par ailleurs, par comparaison avec (2.31), que la réponse en fréquence d'un SLI est la TFTD de sa réponse impulsionnelle.

La réponse en régime sinusoïdal d'un SLI est évidemment directement liée à la réponse en fréquence. Sachant que $x(n) = A \cos(n\varphi + \theta) = A/2(e^{j(n\varphi + \theta)} + e^{-j(n\varphi + \theta)})$, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}
y(n) &= A \frac{H(\varphi)e^{j(n\varphi + \theta)} + H(-\varphi)e^{-j(n\varphi + \theta)}}{2} \quad \text{avec} \quad H(\varphi) = |H(\varphi)|e^{j\arg(H(\varphi))} \\
&= A \frac{H(\varphi)e^{j(n\varphi + \theta)} + H^*(\varphi)e^{-j(n\varphi + \theta)}}{2} \\
&= A |H(\varphi)| \cos(n\varphi + \theta + \arg(H(\varphi)))
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Exemple 2.9

Calculons sous Matlab la réponse en fréquence des SLI suivants :

- Passe-bas : $h(n) = 0.9^n \varepsilon(n)$ (Fig. 2.15)
- Passe-haut : $h(n) = (-0.9)^n \varepsilon(n)$ (Fig. 2.16)
- Passe-bande : $h(n) = 2(0.9)^n \cos(n\pi/2) \varepsilon(n)$ (Fig. 2.17)

```

h=0.9.^[0 :50] ;
stem(h) ;
figure(2) ;
freqz(h,1) ;

```

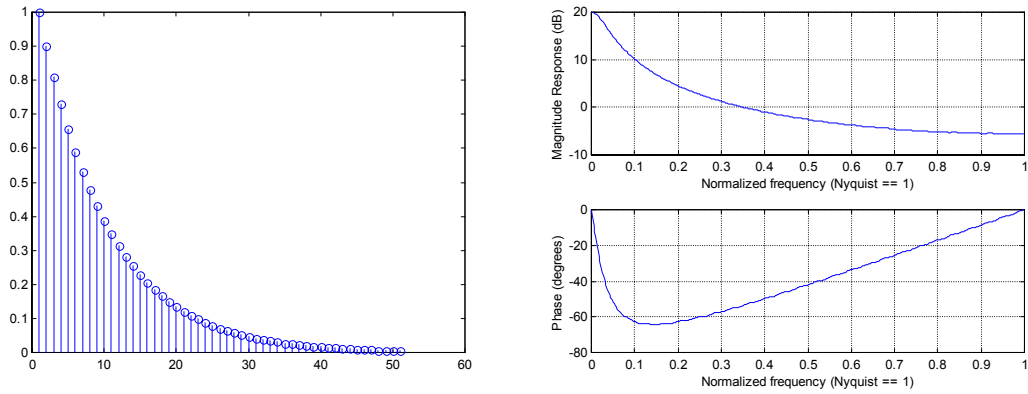


Fig. 2.15 Réponse impulsionnelle et réponse en fréquence du filtre passe-bas

```
h=(-0.9).^[0:50];
stem(h);
figure(2);
freqz(h,1);
```

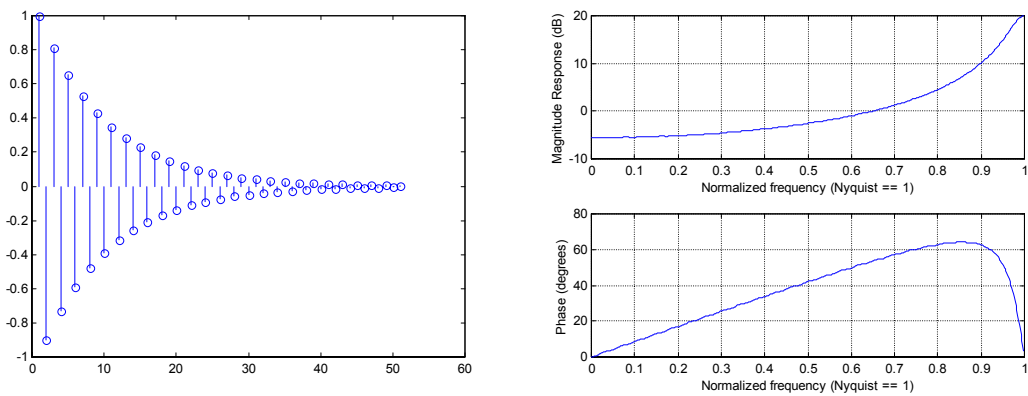


Fig. 2.16 Réponse impulsionnelle et réponse en fréquence du filtre passe-haut

```
h=2*(0.9).^[0:50].*cos([0:50]*pi/2);
stem(h);
figure(2);
freqz(h,1);
```

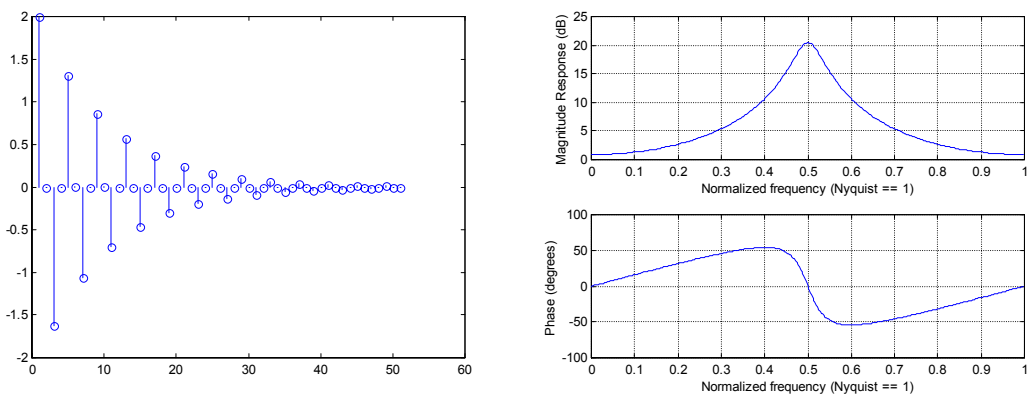


Fig. 2.17 Réponse impulsionnelle et réponse en fréquence du filtre passe-bande

2.3.2 Lien entre réponse opérationnelle et réponse isochrone

Tout comme en analogique, il est possible d'obtenir la réponse en fréquence d'un SLI à partir de l'équation aux différences finies qui le caractérise :

$$y(n) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (2.43)$$

En substituant $e^{jn\varphi}$ à $x(n)$ et $H(\varphi)e^{jn\varphi}$ à $y(n)$ ¹¹, il vient :

$$H(\varphi)e^{jn\varphi} + \sum_{i=1}^N a_i H(\varphi)e^{j(n-i)\varphi} = \sum_{i=0}^M b_i e^{j(n-i)\varphi} \quad (2.44)$$

ce qui donne finalement, en isolant $H(\varphi)$:

$$H(\varphi) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i e^{-ji\varphi}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i e^{-ji\varphi}} \quad (2.45)$$

On prendra l'habitude, pour la suite, d'écrire cette relation sous la forme :

$$H(\varphi) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \bigg|_{z=e^{j\varphi}} = H(z) \bigg|_{z=e^{j\varphi}} \quad (2.46)$$

où l'on retrouve les séquences $\{b_0, b_1, \dots, b_M\}$ et $\{1, a_1, \dots, a_N\}$ associées à des polynômes en la variable complexe z . On lui donne le nom de *transformée en z* associée à l'équation aux différences finies (2.43)¹². On constate donc que la réponse en fréquence d'un SLI numérique est égale à sa transformée en z calculée sur le cercle de rayon unité.

Exemple 2.10

Un filtre numérique passe-bande (que l'on supposera stable) est défini par l'équation aux différences finies :

$$y(n) + 0.81 y(n-2) = x(n) - x(n-2)$$

On demande :

- ☐ de déterminer l'expression analytique de sa réponse en fréquence
- ☐ de déterminer sa réponse de régime pour l'entrée $x(n) = 10 + 10 \cos(n\pi/2) + 10 \cos(n\pi)$
- ☐ de calculer et d'afficher la réponse en fréquence sous Matlab.

La filtre est de type RII. La réponse en fréquence est donnée, soit par la TFTD de $h(n)$, que l'on pourrait calculer à partir de l'équation aux différences finies, mais qui est théoriquement infinie. Il est plus simple de calculer $H(\varphi)$ à partir des coefficients a_i et b_i :

¹¹ Il est important de noter qu'on ne peut ainsi substituer $H(\varphi)e^{jn\varphi}$ à $y(n)$ que si une réponse de régime existe, c'est à dire si le filtre est stable.

¹² L'origine de cette notation sera développée dans un chapitre ultérieur consacré à la transformée en z .

$$H(\varphi) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.81z^{-2}} \bigg|_{z=e^{j\varphi}} = \frac{1 - e^{-j2\varphi}}{1 + 0.81e^{-j2\varphi}}$$

Il vient donc :

$$H(0) = 0 \quad H(\pi/2) = 2/0.19 = 10.53 \quad H(\pi) = 0$$

On en déduit que la réponse de régime sinusoïdal est donnée par $105.3 \cos(n\pi/2)$, ce qui constitue une amplification d'à peu près 20dB.

Matlab permet très facilement de calculer et d'afficher la réponse en fréquence d'un filtre numérique connaissant son équation aux différences finies. La fonction `freqz` est en effet prévue pour être utilisée selon le synopsis `freqz(b,a)` où `b` et `a` sont les vecteurs des a_i et b_i :

`freqz([1 0 -1], [1 0 0.81])` ;

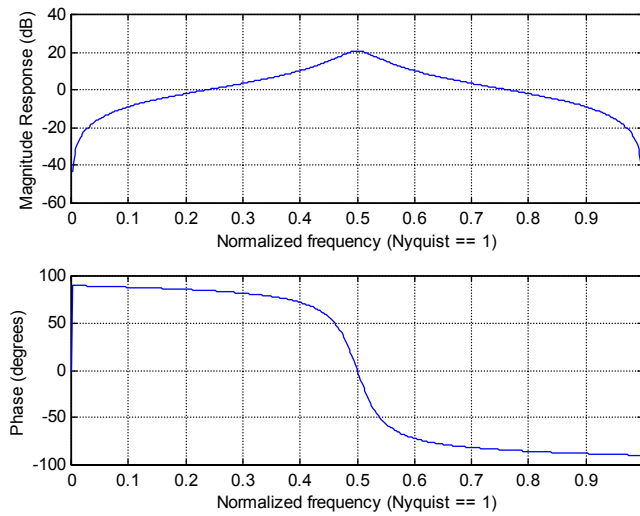


Fig. 2.18 Réponse en fréquence du filtre passe-bande

On retrouve bien sur ce graphique les 20dB d'amplification calculés plus haut.

2.3.3 Interprétation géométrique

L'équation (2.46) se prête à une interprétation géométrique similaire à celle permettant de pressentir la réponse en fréquence d'un système numérique en fonction de la position de ses pôles et zéros. On peut en effet la réécrire sous la forme :

$$H(\varphi) = H(z) \bigg|_{z=e^{j\varphi}} = K z^{-(M-N)} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \bigg|_{z=e^{j\varphi}} \quad (2.47)$$

On en conclut que le module de la réponse en fréquence est obtenu (à K près) en multipliant les normes des vecteurs joignant les zéros du système à un point du cercle de rayon unité, et en divisant le résultat par le produit des normes des vecteurs joignant les pôles à ce même points. De même la réponse en phase

correspond à la somme des arguments des vecteurs issus des zéros moins la somme des arguments des vecteurs issus des pôles¹³.

Exemple 2.11

On peut prévoir la réponse en amplitude du filtre numérique passe-bande de l'exercice précédent :

`zplane([1 0 -1], [1 0 0.81]) ;`

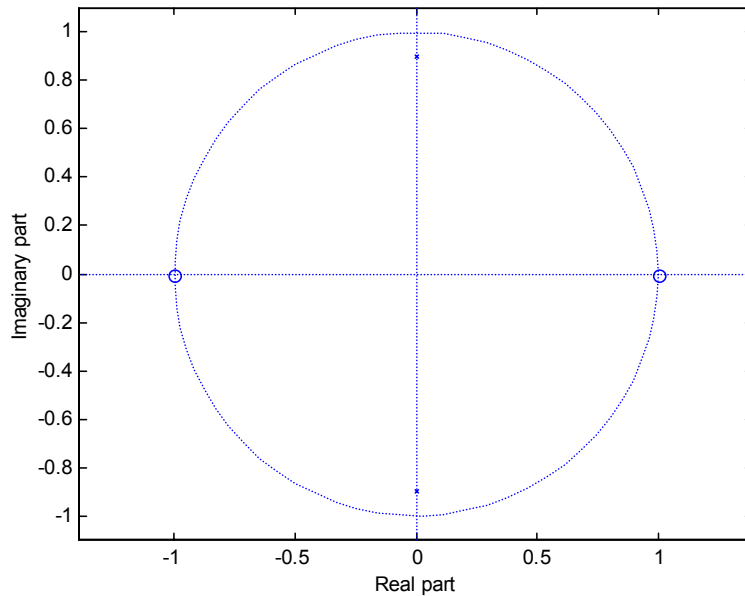


Fig. 2.19 Réponse en fréquence du filtre passe-bande

On constate deux zéros en $\varphi=0$ et π qui imposeront une réponse nulle en $F=0$ et $1/2$, et deux pôles en $\varphi=\pm\pi/2$, proches du cercle de rayon unité. Ces pôles provoqueront une résonance en $F=1/4$, qui sera d'autant plus marquée que les pôles se rapprochent du cercle.

2.3.4 Résumé comparatif entre SLI analogiques et numériques

Nous pouvons à présent résumer le lien entre systèmes numériques et analogiques sous la forme de deux graphiques (Fig. 2.20 et Fig. 2.21).

¹³ On notera que les zéros ou les pôles en $z=0$ (contribution en $z^{-(M-N)}$) n'ont pas d'effet sur l'amplitude de la réponse, mais bien sur sa phase.

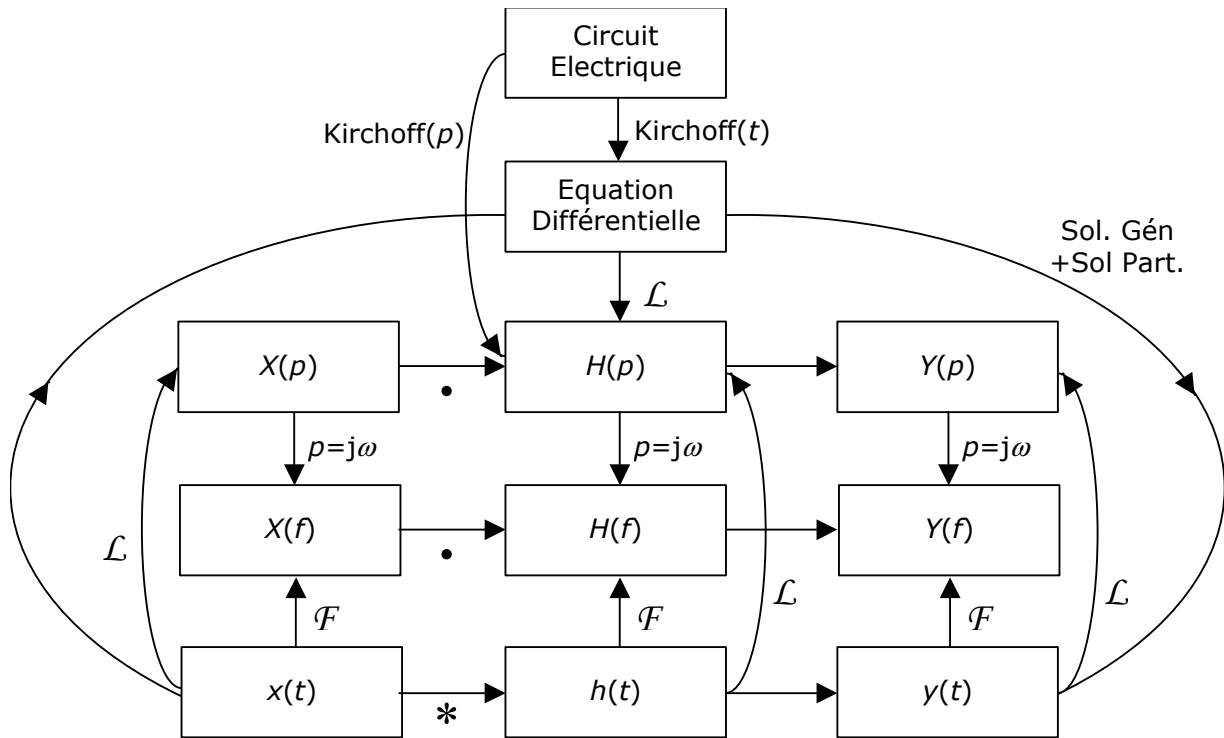


Fig. 2.20 Relations entre éléments d'un SLI analogique

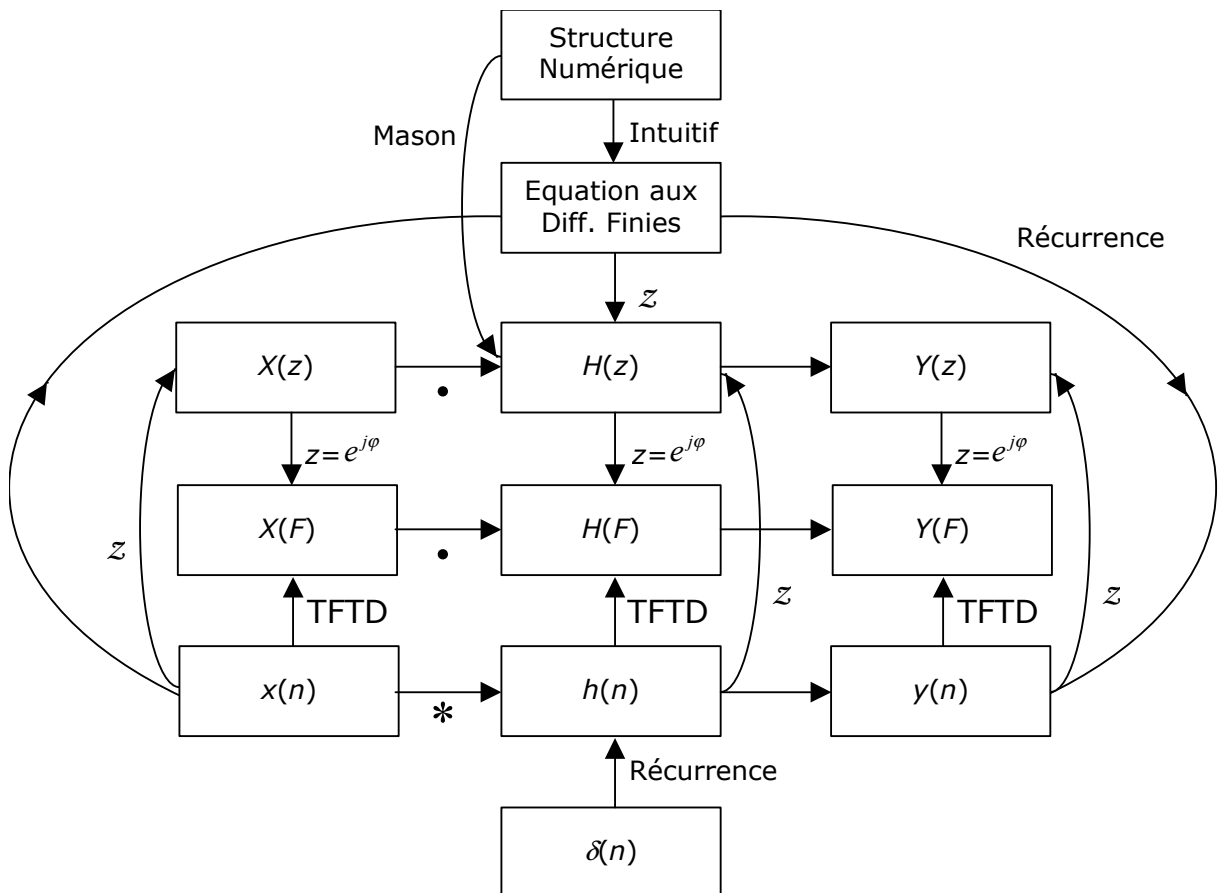


Fig. 2.21 Relations entre éléments d'un SLI numérique

2.3.5 Application : la cellule du second degré

La transmittance rationnelle du second degré :

$$T(z) = K \cdot \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (2.48)$$

caractérise la cellule de base dite *cellule biquadratique* ou *cellule du second degré*. Cette cellule est très utilisée en pratique, ce qui justifie que l'on s'attarde un peu sur ses caractéristiques, notamment ses conditions de stabilité et l'expression de sa réponse en fréquence, en vue de la synthèse de filtres simples.

Stabilité

L'expression (2.48) peut être mise sous une forme utilisée classiquement en théorie des circuits analogiques :

$$T(z) = K \cdot \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2} = K \cdot \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + 2\sigma z + \rho^2} \quad (2.49)$$

La stabilité impose des conditions sur la valeur des coefficients du dénominateur :

- si $b_2 > b_1^2/4$ ($\rho^2 > \sigma^2$), les pôles de $T(z)$ sont complexes et il faut que l'on ait $b_2 < 1$ ($\rho < 1$)
- si $b_2 \leq b_1^2/4$, les pôles sont réels. On obtient alors, après quelques développements partant du fait que le module des racines doit être positif, qu'il faut que $(1 - b_1 + b_2)$ et $(1 + b_1 + b_2)$ soient positifs.

Ces conditions de stabilité sont illustrées à la Fig. 2.22.

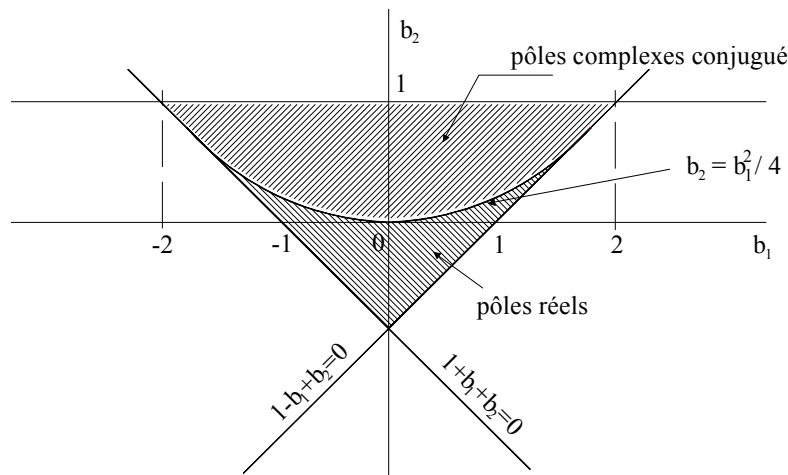


Fig. 2.22 Domaine de stabilité (ordre 2)

Le résonateur du second ordre

La transmittance (2.48) avec pôles complexes situés dans le voisinage du cercle unité, et dans laquelle $a_2 = 0$ (ce qui correspond à un seul zéro, réel), caractérise le résonateur du second ordre (Fig. 2.23).

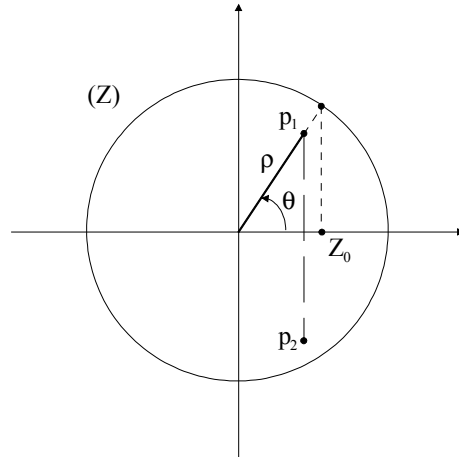


Fig. 2.23 Pôles et zéros d'un résonateur du second ordre

La fonction de transfert est donnée par :

$$T(z) = K \cdot \frac{1 + a \cdot z^{-1}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}} = K \cdot \frac{1 + a \cdot z^{-1}}{(1 - p_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - p_2 \cdot z^{-1})} \quad (2.50)$$

$$\text{avec } p_{1,2} = \rho \cdot e^{\pm j\theta} \quad b_1 = -2\rho \cos \theta \quad b_2 = \rho^2$$

Le calcul de l'amplitude conduit alors à :

$$\begin{aligned} A^2(\varphi) &= T(e^{j\varphi}) \cdot T(e^{-j\varphi}) \\ &= K^2 \cdot \frac{1 + a^2 + 2a \cos \varphi}{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \theta)] \cdot [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi + \theta)]} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si l'on suppose que le zéro est placé comme sur la Fig. 2.23 ¹⁴, on a $a = -\cos \theta$, ce qui conduit à :

$$A^2(\varphi) = K^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \theta)] \cdot [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi + \theta)]} \quad (2.52)$$

Comme on pouvait le prévoir en vertu de l'interprétation géométrique de la réponse en fréquence, cette fonction atteint un maximum pour $\varphi = \theta$. Autour de cette fréquence, l'allure de la réponse en fréquence est surtout influencée par le premier facteur du dénominateur. Si on approxime le second facteur par $1 + \rho^2 - 2\rho \cos(2\theta)$, la réponse en fréquence est approximativement donnée par :

$$A^2(\varphi) \approx K^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \theta)] \cdot [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(2\theta)]} \quad (\text{pour } \varphi \approx \theta) \quad (2.53)$$

Si de plus on suppose que ρ est assez voisin de 1 (ce qui correspond au cas d'un filtre très sélectif), on peut même écrire :

¹⁴ Il n'est pas indispensable d'avoir un zéro pour créer une résonance. On montre par contre que l'utilisation d'un zéro tel que sur la Fig. 2.23 conduit à une filtre dont l'amplitude de la résonance est indépendante de θ .

$$\begin{aligned}
(1-\rho)^2 &\approx 0 \\
1+\rho^2-2\rho &\approx 0 \\
1+\rho^2 &\approx 2\rho
\end{aligned} \tag{2.54}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
1+\rho^2-2\rho \cos(2\theta) &= 1+\rho^2-2\rho \cos^2 \theta + 2\rho \sin^2 \theta \\
&\approx 2\rho(1-\cos^2 \theta) + 2\rho \sin^2 \theta \\
&= 4\rho \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Ce qui donne finalement :

$$A^2(\varphi) \approx \frac{K^2}{[1+\rho^2-2\rho \cos(\varphi-\theta)] \cdot 4\rho} \quad (\text{si } \rho \approx 1) \tag{2.56}$$

Le maximum vaut alors :

$$A_M = \frac{K}{2(1-\rho) \cdot \sqrt{\rho}} \tag{2.57}$$

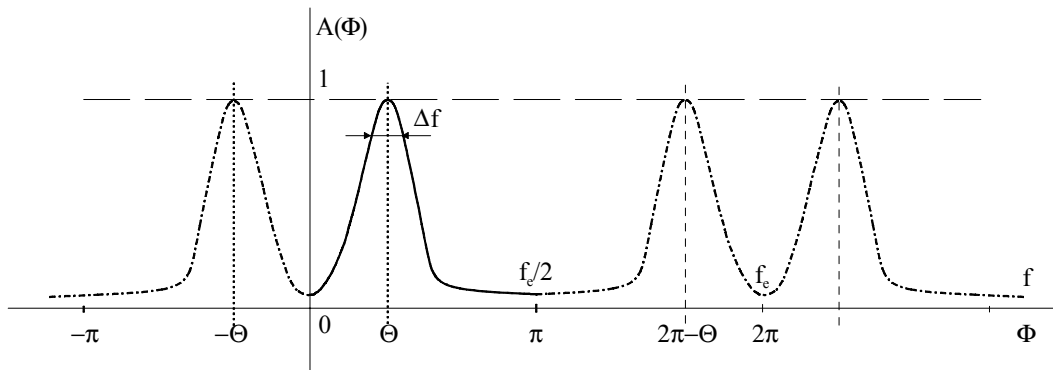


Fig. 2.24 Réponse en fréquence d'un résonateur du second ordre

La loi de l'amplitude en fonction de φ (ou de la fréquence f) est représentée à la Fig. 2.24

L'intervalle de fréquences $\Delta\varphi$ dans lequel A est supérieur à $1/\sqrt{2}$ (la bande passante à 3 dB) se calcule comme suit :

$$A(\varphi)^2 = \frac{1}{2} \cdot A_M^2 = \frac{K^2}{8\varepsilon^2 \cdot \rho} \quad \text{si } \rho = 1 - \varepsilon \tag{2.58}$$

Comme $\cos x \approx 1 - x^2/2$, il vient :

$$1+\rho^2-2\rho \cdot (1-x^2/2) \cong (1-\rho)^2 + x^2 = \varepsilon^2 + x^2 \tag{2.59}$$

On en tire donc la relation :

$$(\varepsilon^2 + x^2) \cdot 4\rho = 8\varepsilon^2 \rho \Rightarrow x = \pm \varepsilon \tag{2.60}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2\varepsilon = 2(1-\rho) \quad \text{radians} \\ \Delta f &= 2(1-\rho).F_e / 2\pi \quad \text{Hertz}\end{aligned}} \quad (2.61)$$

Le filtre coupe-bande du second ordre

La transmittance possédant deux zéros sur le cercle de rayon unité et deux pôles proches de ces zéros et de mêmes arguments :

$$T(z) = K. \frac{1 - 2\cos\theta.z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho\cos\theta.z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad \rho = 1 - \varepsilon \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.62)$$

caractérise un filtre destiné à éliminer une composante spectrale de fréquence $f_0 = \theta. \frac{F_e}{2\pi}$ (figure 4.18).

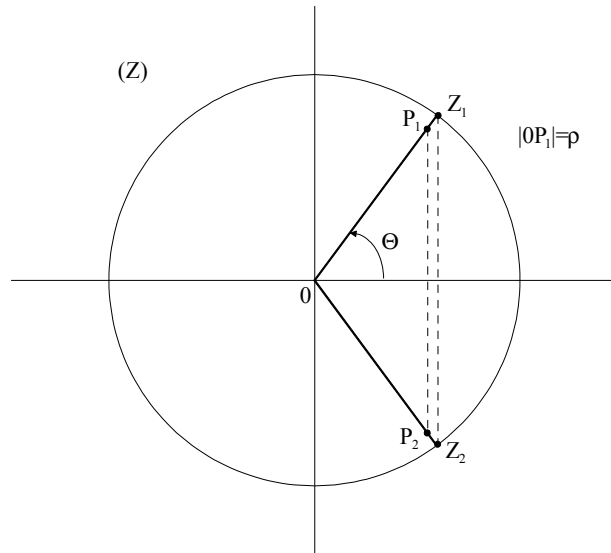


Fig. 2.25 Coupe-bande du second ordre (pôles et zéros)

La loi de l'amplitude est représentée à la Fig. 2.25. On peut montrer, par un raisonnement similaire à ce qui a été fait précédemment, que l'intervalle de fréquences autour de f_0 dans lequel l'amplitude est inférieure à $1/\sqrt{2}$ (la bande coupée à 3 dB) vaut encore :

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2\varepsilon = 2(1-\rho) \quad \text{radians} \\ \Delta f &= 2(1-\rho).F_e / 2\pi \quad \text{Hertz}\end{aligned}} \quad (2.63)$$

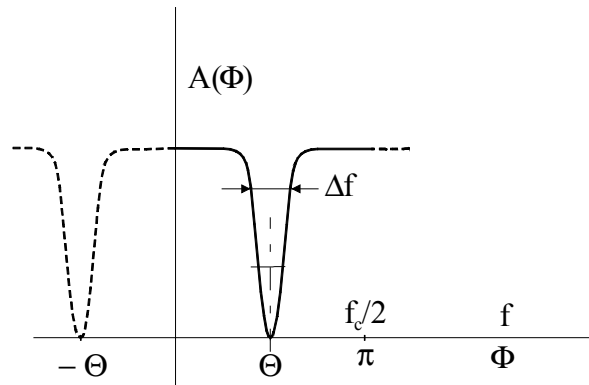


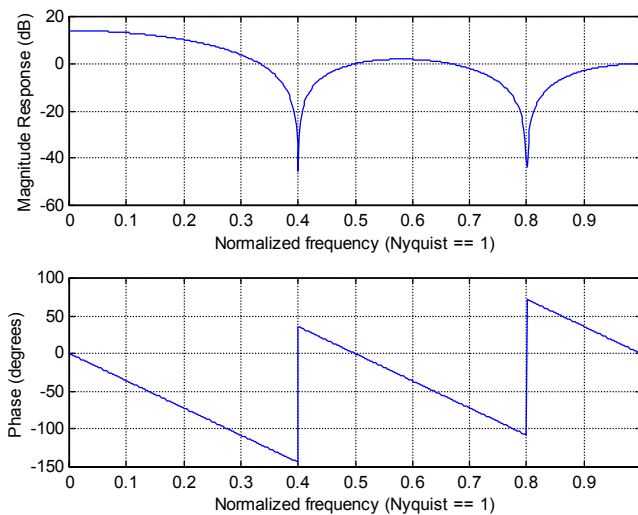
Fig. 2.26 Réponse en fréquence d'un filtre coupe-bande

Exercices

Exercice 2.1

On demande de calculer analytiquement et graphiquement la TFTD de la séquence $\{1,1,1,1,1,0,0,\dots\}$, et de vérifier le résultat avec Matlab.

Solution



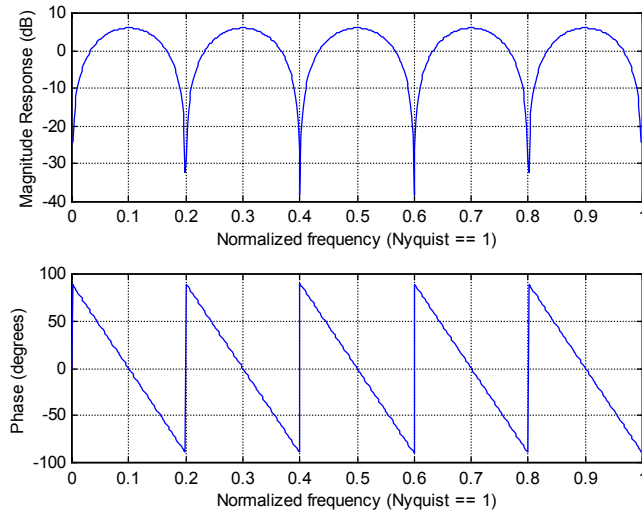
Exercice 2.2

Un *filtre en peigne* est défini par la relation :

$$y(n) = x(n) - x(n - n_0)$$

On demande de déterminer analytiquement sa réponse en fréquence, d'esquisser le graphique de son module à partir de son diagramme pôles-zéros, et de justifier l'appellation de filtre en peigne. Vérifier la réponse sous Matlab pour $n_0=10$.

Solution



Exercice 2.3

Il a été vu à l'exercice 1.2 que la récurrence $y(n)=x(n)+2\cos(\theta)y(n-1)-y(n-2)$ définit un oscillateur numérique à la pulsation réduite φ . On demande de calculer l'expression analytique de la réponse en fréquence de ce système pour $\theta=2\pi/3$, d'expliquer sur le diagramme pôles-zéros pourquoi il y a résonance en $F=1/3$, et de vérifier la réponse sous Matlab.

Solution

